

Елементи комбінаторики.
Правило суми і добутку.
Розміщення.
Перестановки.
Комбінації.

Алгебра
11 клас

Поняття сполуки.

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться вибирати з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку тощо. Оскільки в таких задачах ідеться про ті або інші комбінації об'єктів, то такі **задачі називають комбінаторними**.



Комбінаторика — розділ математики, у якому вивчають способи вибору та розміщення елементів деякої скінченної множини на основі певних умов. .

Вибрані (або вибрані й розміщені) групи елементів називають **сполуками**.

Якщо всі елементи різні, то одержуємо **сполуку без повторень**, а якщо елементи можуть повторюватися, то **сполуку з повтореннями**.

Ми будемо розглядати сполуки без повторень

Правило суми й добутку

Розв'язування багатьох комбінаторних задач спирається на два основних правила — **правило суми й правило добутку**.

Правило суми

Якщо елемент А можна вибрати **m** способами, а елемент В — **n** способами (при цьому вибір елемента А **виключає одночасний вибір** і елемента В), то А **або** В можна вибрати **$(m + n)$** способами

Якщо на столі лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами ($5 + 4 = 9$).



Правило добутку

Якщо елемент А можна вибрати m способами, а *після цього* елемент В — n способами, то А  В можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Якщо в крамниці продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, то вибрати набір із ручки й зошита (тобто пару — ручку і зошит) можна $5 \cdot 4 = 20$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 4 зошитів).



Поняття факторіала

Добуток всіх натуральних чисел **від 1 до n** називається **факторіалом** числа **n** і записується **$n!$** (читається, як "ен факторіал").

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

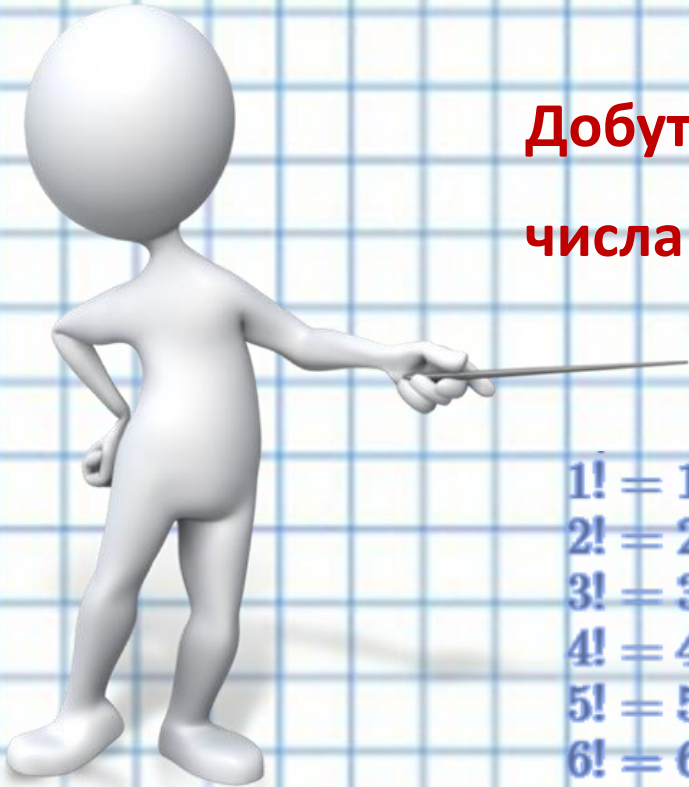
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Прийнято, що $0! = 1$

Кожен більший факторіал можна виразити меншим факторіалом, тобто

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! \text{ і т.д.}$$



Приклад:

1. Обчисли значення виразу.

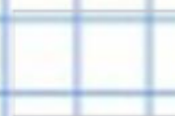
a) $5! + 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 24 = 144$

b) $\frac{7! - 5!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{5 \cdot 4! (42 - 1)}{4!} = 5 \cdot 41 = 205$ ($4!$ виноситься за дужки. У дробу рівні факторіали можна скорочувати.)

c) $\frac{80!}{79!} + \frac{59!}{58!} = \frac{80 \cdot 79!}{79!} + \frac{59 \cdot 58!}{58!} = 80 + 59 = 139$

2. Скороти дріб.

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n$$



Розміщення

Розміщенням з n елементів по k називається будь-яка **впорядкована** множина з k елементів, складена з елементів заданої n -елементної множини.

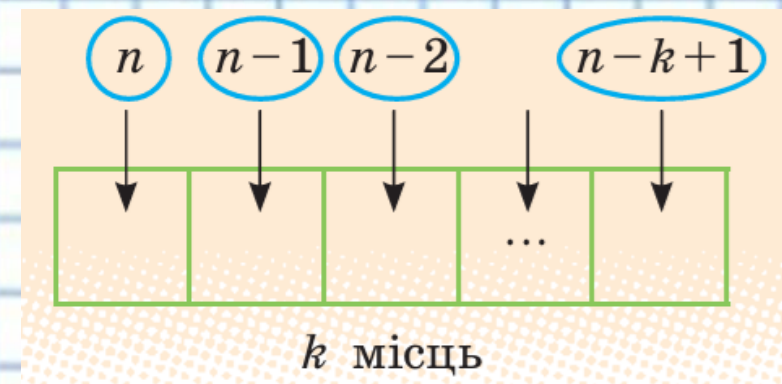
Наприклад, із множини з трьох цифр $\{1;5;7\}$ можна скласти такі розміщення з двох елементів: $(1;5)$, $(1;7)$, $(5;7)$, $(5;1)$, $(7;1)$, $(7;5)$.

Кількість **розміщень із n елементів по k** позначають A_n^k (читають: «А з n по k », A — перша літера французького слова *arrangement* — розміщення).

Як бачимо на прикладі, $A_3^2 = 6$

З'ясуємо, скільки можна скласти розміщень із n елементів по k .

Складання розміщення уявимо як послідовне заповнення k місць, які будемо зображати у вигляді клітинок.



Оскільки нам потрібно вибрати елементи й на перше, і на друге, ... , і на k-те місце, то **використовуємо правило добутку** й одержуємо **формулу числа розміщень із n елементів по k**:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множників}}$$

Якщо отриманий вираз для A_n^k помножити і поділити на $(n-k)!$, то одержимо ще одну формулу для обчислення розміщення :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Під час розв'язування найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитись обчислення кількості сполук.

Для цього достатньо з'ясувати:

- чи враховують порядок розміщення елементів у сполуці;
- чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки.

Якщо порядок розміщення елементів враховують і з n заданих елементів у сполуці використовують тільки k елементів, то **за означенням це розміщення з n елементів по k**.

Приклад 1. На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них побіжить в естафеті 4 по 100 м на першому, другому, третьому й четвертому етапах?

Розв'язання

► Кількість способів вибрати з двадцяти спортсменок чотирьох для участі в естафеті дорівнює кількості розміщень з 12 елементів по 4, тобто

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880. \blacksquare$$

Коментар

Для вибору формули відповідаємо на запитання, наведені вище. Оскільки для спортсменок важливо, у якому порядку вони будуть бігти, то порядок розміщення під час вибору елементів ураховується. До одержаної сполуки входять не всі 12 заданих елементів. Отже, відповідна сполука — розміщення з 12 елементів по 4.

Приклад 2. Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання

► Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \quad \blacksquare$$

Коментар

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі й використовуючи правило добутку.

7	6	5
---	---	---

$$N = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок розміщення враховується й не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3.

Приклад 3. Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, якщо цифри в числі не повторюються.

Вибір формули проводять так само, як і в прикладі 2. Але треба врахувати, що число не може починатися цифрою 0.

Отже, для відповіді на запитання задачі можна спочатку із заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (з нулем на початку), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які починаються цифрою 0.

В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр, крім нуля (їх 6), складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2.

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180$$

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі й використовуючи правило добутку.

6	6	5
---	---	---

6 цифр без 0

6 цифр, які
залишилися,
включно з 0

5 цифр, які
залишилися,
включно з 0

$$N = 6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$$

Перестановки

Якщо розглянути розміщення за умови, що $k = n$, то отримаємо множини, які відрізняються лише порядком.

Розміщення з n елементів по n називають перестановками.

Кількість перестановок з n елементів позначають символом P_n .

Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна утворити 6 різних перестановок: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Отже, $P_3 = 6$.

Підставивши у формулу числа розміщень $k = n$, дістанемо, що

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ тобто } P_n = n!$$

Число перестановок з n елементів дорівнює $n!$

Приклад 2. Скількома способами можна скласти список із 10 прізвищ?

Розв'язання. $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$.

Комбінації (сполучення)

Вибірки, які **відрізняються** одна від одної **принаймні одним елементом**, а не порядком їх розміщення, називають **комбінаціями**.

На відміну від розміщень, **комбінації** — підмножини **невпорядковані**.

Комбінацією з m елементів по n називають будь-яку n -елементну під множину m -елементної множини.

Число комбінацій з m елементів по n позначають C_m^n , $n \leq m$.

Порівняйте: $C_3^2 = 3$, а $A_3^2 = 6$.

Якщо з кожної комбінації з m елементів по n зробити P_n перестановок, то дістанемо A_m^n розміщень. Тому $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$,

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}$$

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Наприклад, $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15.$

Для будь-якого $m \in N.$

$$C_m^m = 1,$$

$$C_m^1 = m.$$

$$C_m^0 = 1$$

Приклад 2. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на збори 2 делегати?

Розв'язання.

Тут $m = 25$, $n = 2$ і порядок не має значення. Тому $C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$

Якщо порядок розташування елементів має значення, то маємо розміщення, якщо ні – комбінації.

У класі навчається 30 дітей. Скількома способами із цього класу можна вибрати...	
...старосту і його заступника?	...двох чергових?
Обов'язки різні! Порядок має значення $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$	Обов'язки однакові! Порядок не має значення $C_{30}^2 = \frac{30!}{2!(30-2)!} = \frac{28! \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 28!} = \frac{870}{2} = 435$

14.7. На тарілці лежать 6 яблук і 9 слив. Скількома способами з тарілки можна взяти:

1) один фрукт; 2) одне яблуко і одну сливу?

1) На тарілці лежать всі фрукти. Отже, можна навмання взяти яблуко **або** сливу.

За правилом суми $N = 6 + 9 = 15$

2) Оскільки одночасно беруть яблуко **і** сливу, то за правилом добутку $N = 6 \cdot 9 = 54$

14.9. Скоротіть дріб

$$1) \frac{8!}{5!} = \frac{\cancel{5!} 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{5!}} = 336$$

$$3) \frac{A_7^2}{A_6^3} = \frac{7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4} = \frac{7}{20}$$

Виконайте самостійно

**№ 14.8;
14.10 (3)**

14.1. Обчисліть

$$1) A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$2) A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

14.5. Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

4	3	2	1
---	---	---	---

На перше місце можна поставити будь-яку з 4-х цифр, тоді на 2-е і наступні місця цифр буде залишатися на 1 менше.

За правилом добутку $N = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Або, враховуючи, що порядок цифр є важливим, можна скористатися формулою для розміщення:

$$A_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

14.11. Обчисліть

$$2) \frac{A_7^3 + A_7^4}{A_7^2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot 5(1 + 4)}{\cancel{7} \cdot \cancel{6}} = 25$$

14.30. Розв'яжіть рівняння

$$2) A_x^2 = 132.$$

$$A_x^2 = x(x - 1)$$

$$x(x - 1) = 132$$

$$x^2 - x - 132 = 0$$

$$x_1 = 12 \quad x_2 = -11 < 0 \quad - \text{не задовольняє умову}$$

Відповідь: 12

14.9. Скоротіть дріб

$$2) \frac{P_3}{P_7} = \frac{3!}{7!} = \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{840}$$

$$4) \frac{C_5^3}{C_6^4} = \frac{\frac{5!}{3! \cdot 2!}}{\frac{6!}{4! \cdot 2!}} = \frac{5! \cdot 4! \cdot \cancel{2!}}{3! \cdot \cancel{2!} \cdot 6!} = \frac{\cancel{5!} \cdot \cancel{3!} \cdot 4}{\cancel{3!} \cdot \cancel{5!} \cdot 6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

14.11. Обчисліть

$$3) \frac{A_8^3}{P_3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 56$$

Виконайте самостійно

№ 14.12

$$4) C_{2000}^{2000} + C_{18}^1 = 1 + \frac{18!}{1! \cdot 17!} = \frac{17! \cdot 18}{17!} = 1 + 18 = 19$$

14.17. Скількома способами із 6 членів президії можна вибрати голову і секретаря зборів?

Порядок
важливий

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

14.19. У групі туристів 16 осіб. Скількома способами можна сформувати з них групу з 3 туристів для екскурсії?

Порядок не
має значення

$$C_{16}^3 = \frac{16!}{3! \cdot 13!} = \frac{\overset{7}{\cancel{13!}} \overset{5}{\cancel{14}} \cdot \cancel{15} \cdot 16}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{13!}} = 560$$

Виконайте самостійно

№ 14.18

14.20

14.27. Обчисліть

$$1) \frac{1}{P_6} - \frac{1}{P_5} = \frac{1}{6!} - \frac{1}{5!} = \frac{1}{5! \cdot 6} - \overset{6}{\frac{1}{5!}} = \frac{1-6}{6!} = \frac{-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = -\frac{1}{144}$$

14.29. Розв'яжіть рівняння

$$1) \frac{P_{x+2}}{P_x} = 42;$$

$$\frac{(x+2)!}{x!} = 42$$

$$\frac{\cancel{x!} (x+1)(x+2)}{\cancel{x!}} = 42$$

$$x^2 + x + 2x + 2 = 42$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -8 < 0 \text{ — не задовольняє умову}$$

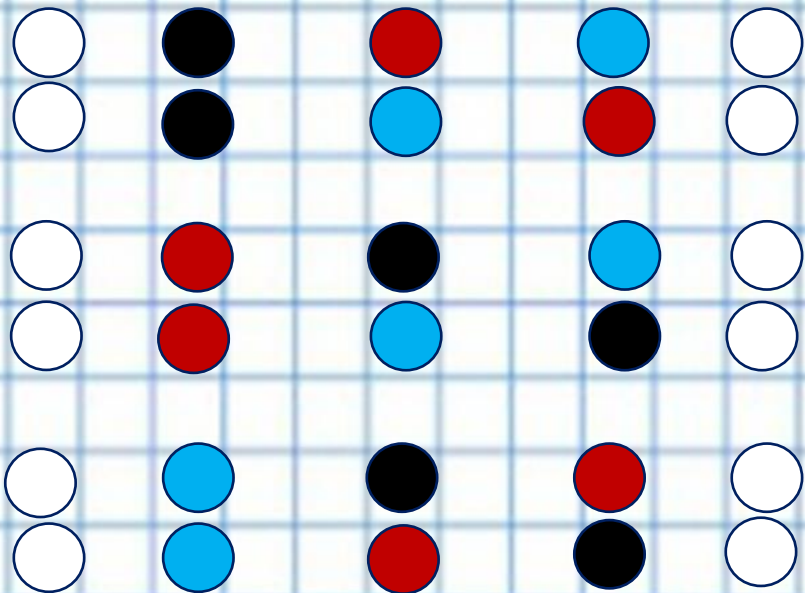
Відповідь: 5

Виконайте самостійно

№ 14.28

14.30

14.31. Скількома способами можна розкласти в ряд 2 білі намистини, чорну, червону і блакитну, якщо білі намистини розташовуються з двох кінців ряду?



1	3	2	1	1
---	---	---	---	---

біла

кольорові

біла

$$P = 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$$

Виконайте самостійно

№ 14.32

14.35. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти із чисел 2, 3, 5, 7, 15, де в кожний дріб входить два різних числа?

$$\frac{2}{3}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{2}{7}; \quad \frac{2}{15};$$

$$\frac{3}{5}; \quad \frac{3}{7};$$

$$\frac{5}{7}; \quad \frac{7}{15};$$

$$N = 8$$